L3 SM UE604P	**Université de Tours**	**Année 2010-2011**

Méthodes mathématiques pour la physique

contrôle continu du 01/03/2011 **durée: 2h**

1. Soient $L_\pm$, L_z trois opérateurs suivants:

$$\begin{aligned} L_+ &= z^2\partial_z + \partial_{\bar z}, \\ L_- &= -\partial_z - \bar z^2 \partial_{\bar z}, \\ L_z &= z\partial_z - \bar z \partial_{\bar z}, \end{aligned}$$

où ∂_z et $\partial_{\bar z}$ notent les dérivées par rapport à z et $\bar z$. Montrer que ces opérateurs vérifient les relations de commutation de l'algèbre du moment angulaire.

2. Démontrer la relation suivante pour les fonctions de Bessel:

$$J_\nu(r) = \frac{r}{2\nu}\left(J_{\nu-1}(r) + J_{\nu+1}(r)\right).$$

3. Donner la forme explicite des harmoniques sphériques $Y_3^{-1}(\theta,\varphi)$ et $Y_2^{-1}(\theta,\varphi)$. Calculer l'intégrale

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \overline{Y_2^{-1}(\theta,\varphi)}\, Y_3^{-1}(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

4. Dans cet exercice on s'intéresse à l'équation de Kummer:

$$x y''(x) + (b-x)y'(x) - a y(x) = 0. \tag{1}$$

Ici x note la variable indépendante et $a, b \in \mathbb{C}$ sont des paramètres constants. On cherche une solution de cette équation sous la forme

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k. \tag{2}$$

- Trouver une relation de récurrence pour α_k.
- Montrer que la solution de cette relation est donnée par

$$\alpha_k = \frac{1}{k!}\frac{\Gamma(b)\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\Gamma(b+k)}\,\alpha_0.$$

La solution (2) de (1) avec $\alpha_0 = 1$ s'appelle la fonction de Kummer et est noté $M(a,b,x)$.

- Montrer que pour $\mathrm{Re}\, b > \mathrm{Re}\, a > 0$ la fonction $M(a,b,x)$ admet la représentation intégrale suivante:

$$M(a,b,x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}\int_0^1 e^{xt} t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}\, dt.$$

Rappels:

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$